

Geometría con regla y compás

Miguel Ángel Ruiz
Sesión elaborada e impartida junto a
Paco Tórtola Vivo



Objetivos:

- Introducir el razonamiento axiomático-deductivo a través de una materia conocida, la geometría (asimilar el concepto de axioma, definición, demostración).
- Generar inquietudes sobre el conocimiento matemático adquirido.
- Potenciar el interés por la geometría clásica.
- Transmitir cultura general matemática.



Metodología:

- Mostramos *Los Elementos* de la manera más sintética posible.
- Se introducen de manera intuitiva las definiciones, axiomas y postulados.
- Explicamos algunas de las primeras proposiciones para ilustrar el razonamiento paso a paso.
- Se aportan más proposiciones y se proponen problemas para que sean resueltos utilizando estas como apoyo.
- Después, se demuestra algún resultado más complejo e interesante.
- Para acabar se habla del postulado de las paralelas y los tres problemas délicos, a modo de curiosidad.



Nos ponemos en marcha:

Los Elementos de Euclides



Preparación del terreno: definiciones

Punto: figura geométrica sin dimensión (longitud, área, volumen...)

Línea: figura que solo tiene longitud (no tiene anchura). Tiene infinitos puntos.

Segmento: línea finita que solo se extiende en una dirección. Tiene dos extremos.

Recta: línea infinita que solo se extiende en una dirección. No tiene extremos.

Superficie: figura que solo tiene longitud y anchura. Contiene infinitas líneas.

Plano: superficie que solo se extiende en dos direcciones.

Ángulo: región del plano delimitada por dos rectas que se cortan en un punto.

Las reglas del juego: postulados

1. Extender un segmento que pasa por dos puntos.
2. Prolongar continuamente un segmento (las rectas no tienen fin).
3. Trazar una circunferencia conociendo su centro y un punto cualquiera de la misma.
4. Todos los ángulos rectos son iguales (trasladar figuras en el plano).
5. Si dos rectas, al pasar otra recta que las corta a las dos, forman ángulos agudos, entonces ambas rectas se cortan. Dicho de otra forma, ninguna recta que corta a dos rectas paralelas forma dos ángulos agudos.

¡Manos a la obra!

Las proposiciones

Una proposición es un enunciado matemático. Los enunciados matemáticos son enunciados sobre los que se puede averiguar su certeza o falsedad utilizando un razonamiento llamado demostración, en la que intervienen otros enunciados y los postulados o axiomas.

¿Cuáles de estos son enunciados matemáticos?

- Ayer Paco visitó a su hermana.
- Si n es par, entonces $3n$ también es par.
- El número 5 huele a fresa.
- Dos cuadriláteros son iguales si sus lados son iguales.
- Todos los humanos son mortales, Sócrates es humano entonces Sócrates es mortal.
- 4.



Proposición 1

Dado un segmento,
construir un triángulo
equilátero que lo tenga
como base.



Proposición 2

Dados un segmento y un punto, trazar un segmento congruente al primero cuyo extremo sea el punto.



Proposición 3

Dados dos segmentos,
quitar al mayor un
segmento congruente con
el menor.



Proposición 4

Si dos triángulos tienen dos lados congruentes y los ángulos entre estos lados también congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Proposición 5

En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son iguales.



EJERCICIO EN GRUPOS

Demostrar que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto utilizando las proposiciones vistas anteriormente.



Proposición 8

Si dos triángulos tienen cada uno un lado congruente con uno del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

Proposición 15

Si dos rectas se cortan, entonces dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Proposición 22

Si dos triángulos tienen dos ángulos congruentes y los lados que unen los vértices en los que están también son congruentes, entonces los dos triángulos son congruentes.



EJERCICIO ADICIONAL EN GRUPOS

Demostrar que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto utilizando las proposiciones vistas anteriormente.



Colofón: el Teorema de Pitágoras



Proposición 47: Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la del cuadrado de la hipotenusa.

Seguiremos la demostración de Pappus, matemático del siglo IV d.C.

Un poco de ayuda: Proposición 36

Dos paralelogramos de igual base, y entre las mismas paralelas, tienen superficies equivalentes.



Para terminar: el Postulado de las paralelas

El quinto postulado de *Los Elementos* ha causado mucha polémica a lo largo de la historia. Su notable complejidad con respecto a los demás postulados ha hecho que muchos los matemáticos hayan intentado demostrarlo como una proposición más, a partir del resto de postulados y proposiciones.

Sin embargo, en el siglo XIX se consiguió probar que efectivamente es un postulado, utilizando geometrías en las que no se da y a través de un punto no pasa una paralela a una recta dada, sino que o no pasa ninguna o pasa una infinidad.



Para terminar (2): los tres problemas déllicos

Problema 1: duplicación del cubo. Crear un cubo que tenga el doble de volumen que uno dado.

Problema 2: trisección del ángulo. Dividir un ángulo en tres ángulos iguales.

Problema 3: cuadratura del círculo. Hallar un cuadrado que tenga la misma área que un círculo.



Conclusiones:

- El alumnado muestra interés por la materia y relaciona los conceptos con todo aquello que ha aprendido.
- Resulta algo costoso incorporar el razonamiento axiomático-deductivo pero se aprecia esfuerzo por resolver los ejercicios que se proponen.
- Con una sesión extra se puede ahondar en el propósito de entender los axiomas de manera abstracta, mostrando otras geometrías.

